

13. НЕПРЕКЪСНАТИ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ.

Случайната величина ξ има нормално разпределение с параметри μ и σ ,

$\xi \in N(\mu, \sigma)$, ако има плътност на разпределение $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

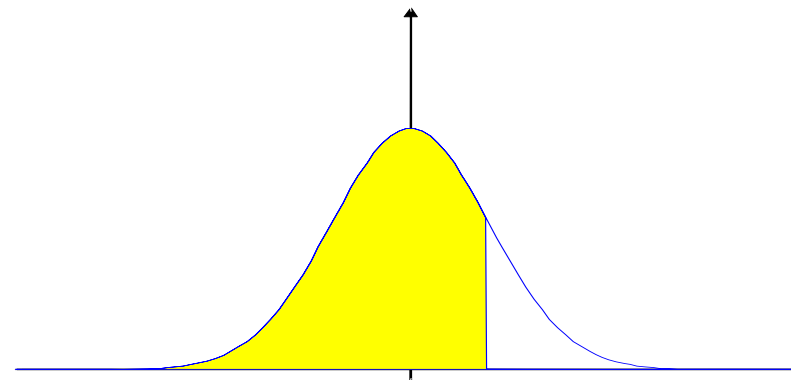
Числени характеристики: $E\xi = \mu, \quad \sigma = \sigma\xi = \sqrt{D\xi}$.

При стойности на параметрите $\mu=0$ и $\sigma=1$, разпределението $N(0, 1)$ се нарича **стандартно нормално разпределение**. За стандартното нормално разпределение е прието функцията на разпределение $F_\xi(x)$ да се означава с $\Phi(x)$ или $\Phi(z)$, а плътността $f_\xi(x)$ да се означава с $\varphi(x)$ или $\varphi(z)$.

Функция на разпределение на стандартната нормална величина $Z \in N(0, 1)$:

$$\Phi(x) = P(Z < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

Стойностите ѝ определят лицето на заштрихованата част на фигурата.



За $x \in [0, \infty)$ се вземат от таблица – Приложение 1.

За $x \in (-\infty, 0)$ се използва формулата $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Ако $\xi \in N(\mu, \sigma)$, то $\frac{\xi - \mu}{\sigma} \in N(0, 1)$.

Задача 1. Дадена е величината $Z \in N(0,1)$. Да се пресметне:

a) $P(Z < 1,67)$;

Стандартно нормално разпределение $N(0, 1)$: $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$					
z	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.519938873	0.523922253	0.527903240	0.531881440	0.535856456
0.1	0.559617712	0.563559473	0.567494933	0.571423709	0.575345420
0.2	0.598706274	0.602568057	0.606419814	0.610261186	0.614091818
0.3	0.636830590	0.640576374	0.644308699	0.648027240	0.651731677
0.4	0.673644759	0.677241874	0.680822481	0.684386299	0.687933051
0.5	0.708840345	0.712260318	0.715661192	0.719042736	0.722404724
0.6	0.742153956	0.745373154	0.748571176	0.751747842	0.754902979
0.7	0.773372720	0.776372779	0.779350124	0.782304631	0.785236183
0.8	0.802337508	0.805105527	0.807849842	0.810570386	0.813267094
0.9	0.828943888	0.831472403	0.833976760	0.836456943	0.838912939
1.0	0.853140919	0.855427672	0.857690314	0.859928875	0.862143390
1.1	0.874928011	0.876975542	0.878999459	0.880999834	0.882976744
1.2	0.894350161	0.896165253	0.897957619	0.899727366	0.901474606
1.3	0.911491948	0.913084979	0.914656492	0.916206622	0.917735507
1.4	0.926470700	0.927854925	0.929219087	0.930563344	0.931887852
1.5	0.939429229	0.940620050	0.941792438	0.942946563	0.944082597
1.6	0.950528549	0.951542794	0.952540341	0.953521368	0.954486051
1.7	0.959940886	0.960796142	0.961636477	0.962462069	0.963273096

$$P(Z < 1,67) = \Phi(1,67) = 0,95254.$$

$$б) P(Z < -0,28);$$

$$P(Z < -0,28) = \Phi(-0,28) = 1 - \Phi(0,28) = 1 - 0,61 = 0,39.$$

$$в) P(0,32 < Z < 1,5).$$

$$P(0,32 < Z < 1,5) = \Phi(1,5) - \Phi(0,32) = 0,933 - 0,6255 = 0,3075.$$

Задача 2. Случайната величина ξ е нормално разпределена с параметри $\mu = 50$ и $\sigma^2 = 25$. Намерете вероятността ξ да бъде:

а) между 45 и 48;

$$P(45 < \xi < 48) = P\left(\frac{45-50}{5} < \frac{\xi-50}{5} < \frac{48-50}{5}\right) = P(-1 < Z < -0,4) = \Phi(-0,4) - \Phi(-1) = 1 - \Phi(0,4) - (1 - \Phi(1)) = \Phi(1) - \Phi(0,4) = 0,8413 - 0,6554 = 0,1859.$$

б) между 52 и 60;

$$P(52 < \xi < 60) = P\left(\frac{52-50}{5} < \frac{\xi-50}{5} < \frac{60-50}{5}\right) = P(0,4 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(0,4) = 0,9772 - 0,6554 = 0,3218.$$

в) по-голяма от 54.

$$P(\xi > 54) = 1 - P(\xi \leq 54) = 1 - P\left(\frac{\xi-50}{5} < \frac{54-50}{5}\right) = 1 - P(Z < 0,8) = 1 - \Phi(0,8) = 1 - 0,788 = 0,212.$$

Задача 3. Ръстът в сантиметри на завършващи 7 клас ученици е нормално разпределена случайна величина $\xi \in N(150, 20)$. Ръководството на баскетболен отбор е решило да потърси нови попълнения за отбора си измежду 30-те % най-високи ученици. Да се определи какъв е минималния ръст, който трябва да има ученик, за да участва в избора.

Решение:

Нека означим минималния ръст с x_0 . Търсим

$$P(\xi > x_0) = 0,3, \quad P\left(\frac{\xi - 150}{20} > \frac{x_0 - 150}{20}\right) = 0,3$$

$$P\left(Z > \frac{x_0 - 150}{20}\right) = 0,3, \quad P\left(Z \leq \frac{x_0 - 150}{20}\right) = 0,7$$

$$\Phi\left(\frac{x_0 - 150}{20}\right) = 0,7, \quad \frac{x_0 - 150}{20} = 0,52, \quad x_0 = 0,52 \cdot 20 + 150 = 160,4.$$

Задача 4. Точките на теста IQ са нормално разпределени със средна стойност 100 и стандартно отклонение 15. Каква е вероятността случайно избран човек, който е взел теста да има:

а) под 120 точки;

$$P(\xi < 120) = P\left(\frac{\xi - 100}{15} < \frac{120 - 100}{15}\right) = P(Z < 1,33) = \Phi(1,33) = 0,9081859.$$

б) над 125 точки;

$$P(\xi > 125) = 1 - P(\xi \leq 125) = 1 - P\left(\frac{\xi - 100}{15} \leq \frac{125 - 100}{15}\right) = P(Z < 1,66) = \Phi(1,66) = 0,9515.$$

в) между 90 и 110 точки.

$$P(90 < \xi < 110) = P\left(\frac{90 - 100}{15} < \frac{\xi - 100}{15} < \frac{110 - 100}{15}\right) = P(-0,66 < Z < 0,66) = \Phi(0,66) - \Phi(-0,66) = \Phi(0,66) - (1 - \Phi(0,66)) = 2 \cdot \Phi(0,66) - 1 = 2 \cdot 0,7454 - 1 = 0,4908.$$